

## بررسی مدل بیانکی نوع I و پارامتر تشخیص حالت یاب برای انرژی تاریک شیخ در کیهانشناختی فرکتالی

علی آقامحمدی

گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سنندج، سنندج، ایران  
ایمیل: [a.ghamohamadi@iausdj.ac.ir](mailto:a.ghamohamadi@iausdj.ac.ir)  
ایمیل: [a.aqamohamadi@gmail.com](mailto:a.aqamohamadi@gmail.com)

### چکیده.

در این مطالعه، مدل بیانکی نوع I در کیهانشناختی فرکتالی و پارامتر حالت یاب<sup>1</sup> برای انرژی تاریک شیخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. نمودار پارامتر حالت یاب، خواص انرژی تاریک را مشخص می‌کند و تمیز بین مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهان شناسی و مدل‌های انرژی تاریک شیخ نشان داده می‌شود. با استفاده از پارامترهای حالت یاب  $r$  و  $s$  می‌توان استنباط کرد که این مدل ارایه شده فاز ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهان شناسی جهان فرکتالی را نتیجه می‌دهد. هم چنین رفتار فانتوم<sup>2</sup> کوینتسنس<sup>3</sup> انرژی تاریک شیخ نشان داده می‌شود. در نهایت اثر ناهمسانگردی روی تحول جهان در نمودار پارامتر حالت یاب نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: جهان ناهمسانگرد، کیهانشناختی فرکتالی، انرژی تاریک شیخ، انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته، دیاگرام حالت یاب

## A study on type I Bianchi model and statefinder diagnostic for ghost dark energy in a fractal cosmology

Ali. Aghamohammadi

Department of Physics, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran.

email: [a.ghamohamadi@iausdj.ac.ir](mailto:a.ghamohamadi@iausdj.ac.ir)

email: [a.aqamohamadi@gmail.com](mailto:a.aqamohamadi@gmail.com)

**Abstract.** In this work, we consider the type I Bianchi model in a fractal cosmology and investigate the ghost dark energy model from the statefinder viewpoint. The statefinder diagrams depict the properties of the ghost dark energy and show the discrimination between this scenario,  $\Lambda$ CDM and generalized ghost dark energy models. By using the statefinder parameters  $r$  and  $s$ , we find out that the studied model can attain the  $\Lambda$ CDM phase of the fractal universe. We also show the behavior of the ghost (generalized ghost) dark energy and quintessence (phantom). Lastly, we show the effect of the anisotropy on the evolution of the universe in the statefinder diagram.

**Keywords:** Anisotropic universe; Fractal cosmology; Ghost DE; Generalized ghost DE; Statefinder diagram

<sup>1</sup> Statefinder

<sup>2</sup> Phantom

<sup>3</sup> Quintessence

## ۱ مقدمه

انبساط شتابدار جهان در بسیاری از تحقیقات اخیر مشاهده شده است [۱، ۲]. در بسیاری از آن تحقیقات علت اصلی این شتاب کیهانی را وجود انرژی تاریک با فشار منفی می‌دانند [۳، ۴، ۵، ۶]. در همین راستا مدل‌های انرژی تاریک فراوانی مورد مطالعه قرار گرفته است، از جمله مدل انرژی تاریک تعمیم یافته ونزیانو<sup>۴</sup> به عنوان یک مدل جدید ارائه گردید [۷، ۸].

مدل انرژی تاریک ونزیانو برای حل تقارن  $U(1)$  که مسئله‌ای در نظریه موثر انرژی پایین در کوانتم کورمودینامیک<sup>۵</sup> [۹، ۱۰، ۱۱] می‌باشد، پیشنهاد شد. در بعضی مدل‌های انرژی تاریک، شیخ به عنوان انرژی تاریک عمل می‌کند، که دارای درجه آزادی انتشاری حقیقی مواجه با قیده‌های محکم می‌باشد [۱۲]. در مرجع [۱۳]، نویسنده بیان کرده است که سهم میدان شیخ کورمودینامیک ونزیانو برای انرژی خلاء به دلیل آنکه مقدار چشمداشتی انرژی ممنوع خلاء به طور مجزا پایسته است، علاوه بر  $H$  جمله از مرتبه  $H^2$  نیز در آن ظاهر می‌شود [۱۴]، یعنی انرژی خلاء میدان شیخ برابر است با  $(H^2 + O(H^2))$ ، که در آن جمله دوم یک نقش مهمی در مراحل اولیه تحول عالم بازی می‌کند، و به عنوان انرژی تاریک عمل می‌کند [۱۵]. مدل انرژی تاریک تعمیم یافته شیخ در مرجع [۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً تحقیقات زیادی در زمینه ایجاد ارتباط بین انرژی تاریک و مدل‌های میدان اسکالر صورت گرفته است [۱۷]. این تحقیقات انگیزه ما برای بازسازی میدان اسکالر کوپنتنس و پتانسیل مدل تعمیم یافته شیخ کیهانشناختی فرکتالی شد.

کالکائگی<sup>۶</sup> [۱۸، ۱۹] روش نظری دیگری برای توسعه کیهانشناختی فرکتالی توسط نظریه میدان بازهنجارش تغییرناپذیر محاسبات- توانی پیشنهاد کرد. مقاله لینده<sup>۷</sup> [۲۰] نخستین گام بازشناسی در کیهانشناختی فرکتالی بود. برای مطالعه بیشتر کیهانشناختی فرکتالی خواننده به مقاله [۲۱] ارجاع داده می‌شود. کنش این مدل هموردای لورنتسی است و متریک فضا-زمان به صورت  $(M, \varrho)$  با معیار استیلتجی<sup>۸</sup>  $\varrho$  تجهیز شده است. معادلات فریدمن در کیهان شناسی فرکتالی می‌تواند با استفاده از رفتار ترمودینامیکی غیر تعادلی به رابطه کلوسیوس تبدیل شوند [۲۲]. خواص ترمودینامیکی افق ظاهری در جهان فرکتالی مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند [۲۳]. ارتباط بین انرژی تاریک و ماده تاریک در جهان فرکتالی فریدمن رابرتسون واکر در مراجع [۲۴، ۲۵] مطالعه شده‌اند. در مرجع [۲۶] با معرفی یک برهم کنش بین انرژی تاریک شیخ و ماده تاریک معلوم شد که معادله پارامتر حالت انرژی تاریک شیخ خط فانتوم را قطع می‌کند، اما مسئله محدود به حالتی شد که معادله پارامتر حالت ثابت بود و نقش وابستگی زمانی انرژی تاریک در جهان ناهمسانگرد نادیده گرفته شده بود. در کار حاضر اثر ناهمسانگردی روی آهنگ زمانی معادله پارامتر حالت برای مدل‌های انرژی تاریک شیخ و تعمیم یافته آن مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در تحقیق تابش پس‌زمینه کیهانی تعدادی زاویه بزرگ غیر عادی ظاهر شدند که همسانگردی آماری جهان را نقض کردند [۲۷]. به نظر می‌رسد که طرح مدل‌های بیانکی محتمل‌ترین توضیح این رفتار غیر عادی باشند [۲۸]. بعضی مدل‌های بیانکی III در نظریه اسکالر تانسور در مرجع [۲۹] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. به طور کلی‌تر مدل‌های بیانکی در مراجع [۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴] مطالعه شده‌اند. و سهم مولفه فرکتالی فقط در مراحل اولیه تحول عالم قابل توجه‌اند. در نتیجه جستجو مدل‌های انرژی تاریک در زمینه کیهانشناختی فرکتالی ارزشمند می‌باشد. کار حاضر بر پایه بخش‌های ذیل تنظیم شده است: در بخش نخست معادلات پایه در چارچوب کیهانشناختی فرکتالی در مدل بیانکی ارائه داده می‌شوند، در بخش نتایج مقدار انرژی تاریک جهان تعیین شده توسط گرانش فرکتالی در مدل بیانکی توضیح داده خواهد شد، به علاوه مدل انرژی تاریک شیخ مورد بحث قرار می‌گیرد و پارامتر تشخیص حالت یاب به مدل انرژی تاریک شیخ در کیهانشناختی فرکتالی اعمال می‌شود. در ادامه تحول کیهانشناختی مدل انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته مطالعه می‌گردد و بازشناسی با پارامتر حالت یاب در این مدل انجام می‌گیرد، نهایتاً بخش آخر به بحث کار حاضر اختصاص دارد.

## ۲ معادلات پایه و کیهانشناختی فرکتالی در مدل بیانکی

خواص فرکتالی نظریه گرانش کوانتمی  $n$  بُعدی در چندین زمینه تحقیق شده است. با فرض آنکه ماده به طور کمینه با گرانش جفت شده کنش هیلبرت-اینشتین در فضا-زمان فرکتال به صورت زیر بیان می‌شود [۱۸، ۱۹]

<sup>۴</sup> Veneziano

<sup>۵</sup> QCD

<sup>۶</sup> Calcagni

<sup>۷</sup> Linde's

<sup>۸</sup> Stieltjes

$$S = \frac{M_p^2}{\Upsilon} \int d\varrho(x) \sqrt{-g} (R - \Upsilon \Lambda - \omega \partial_\mu v \partial^\mu v + \mathcal{L}_m), \quad (1)$$

که در آن  $\Lambda$ ،  $M_p^2 = \Lambda \pi G$ ،  $g_{\mu\nu}$ ،  $g$ ، به ترتیب دترمینان متریک، تانسور متریک، جرم کاهش یافته پلانک و ثابت کیهانشناختی هستند، بعلاوه پارامتر  $\omega$  به دلیل حضور میدان اسکالر  $v$  ظاهر شده، که این میدان همانند میدان متریک دینامیکی است. مقیاس بُعد  $\varrho$  برابر است با  $-D$  که در آن پارامتر  $\alpha > 0$  است. اکنون برای بدست آوردن معادلات میدان به متریک و وردش کنش نسبت به آن نیاز داریم. عنصر طول بیانکی نوع I به صورت زیر است

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dx^2 - B^2 dy^2 - C^2 dz^2, \quad (2)$$

که در آن پارامترهای  $C$  و فاکتور مقیاس کیهانی در جهت‌های مختلف هستند. این متریک ساده ترین متریک مدل کیهانی همگن ناهمسانگرد است که با مساوی قرار دادن فاکتور مقیاس جهت‌های مختلف به متریک فریدمن رابرتسون واکر<sup>۹</sup> تبدیل می‌شود، بعلاوه گروه تقارنی این فضا زمان گروه آبلی با بردار کلینگ  $\xi = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$  می‌باشد که کل ثابت ساختارهای چنین گروه تقارنی صفر است، در نتیجه از وردش کنش (۱) نسبت به متریک داده شده معادلات میدان در جهان فرکتالی به صورت زیر معین می‌شوند

$$\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} + \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \frac{\dot{v}}{v} - \frac{1}{\Upsilon} \omega \dot{v}^2 = \Lambda \pi G \rho_{tot} + \Lambda, \quad (3)$$

$$\frac{\Upsilon}{3} \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{C}}{C}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} + \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC}\right) + \frac{\square v}{v} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \frac{\dot{v}}{v} - \frac{1}{\Upsilon} \omega \dot{v}^2 = \Lambda \pi G p_{tot} - \Lambda, \quad (4)$$

که در آن  $p_{tot}$  و  $\rho_{tot}$  به ترتیب چگالی انرژی کل و فشار ترکیب ضعیف سیال ایده‌آل جهان است. عبارت  $\square v$  با یک محاسبه تانسوری ساده به صورت  $\square v = -\ddot{v} - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C}\right) \dot{v}$  حاصل می‌شود، هم‌چنین کمیت‌های فاکتور مقیاس کل، اسکالر ریچی، پارامتر هابل، تانسور برش بدون رد در متریک بیانکی به صورت زیر نوشته می‌شوند [۳۳، ۳۴، ۳۵]

$$a = (ABC)^{\frac{1}{3}}, \quad (5)$$

$$R = -\Upsilon \left( 3(\dot{H} + \Upsilon H^2) + \sigma^2 \right), \quad (6)$$

$$H = \frac{1}{3} \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{C}}{C} \right), \quad (7)$$

$$\Upsilon \sigma^2 = \left( \frac{\dot{A}}{A} \right)^2 + \left( \frac{\dot{B}}{B} \right)^2 + \left( \frac{\dot{C}}{C} \right)^2 - 3H^2, \quad (8)$$

که در آن  $\sigma^2 = 1/2 \sigma_{ij} \sigma^{ij}$  و در آن  $\sigma_{ij} = u_{i,j} + \frac{1}{\Upsilon} (u_{i;k} u^k u_j + u_{j;k} u^k u_i) + \frac{1}{\Upsilon} \theta (g_{ij} + u_i u_j)$  تانسور برش است که آهنگ واپیچش یا تحریف شار ماده را بیان می‌کند. بنابراین با این کمیت‌ها معادلات میدان به صورت زیر بازنویسی می‌گردند

$$3H^2 - \sigma^2 + 3H \frac{\dot{v}}{v} - \frac{1}{\Upsilon} \omega \dot{v}^2 = \Lambda \pi G \rho_{tot} + \Lambda, \quad (9)$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 - \sigma^2 + \frac{\square v}{v} + H \frac{\dot{v}}{v} - \frac{1}{\Upsilon} \omega \dot{v}^2 = \Lambda \pi G p_{tot} - \Lambda, \quad (10)$$

از ترکیب آنها به رابطه زیر می‌رسیم

$$\dot{H} + H^2 + \frac{\Upsilon}{3} \sigma^2 + \frac{\ddot{v}}{2v} + \frac{H \dot{v}}{2v} + \frac{1}{3} \omega \dot{v}^2 = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{tot} + 3p_{tot}) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (11)$$

<sup>۹</sup>Friedmann-Robertson-Walker

معادله پایستگی انرژی در کیهانشناختی فرکتالی به شکل زیر نوشته می‌شود [۱۸، ۱۹]

$$\dot{\rho}_{tot} + \left( 3H + \frac{\dot{v}}{v} \right) (\rho_{tot} + p_{tot}) = 0. \quad (12)$$

با در نظر گرفتن یک فرم تابع توانی برای  $v$  به صورت  $v = a^{-\epsilon}$  [۳۶]، که  $\epsilon$  یک ثابت است، معادله اول بیانگی (۱۱) در غیاب ثابت کیهانشناختی به صورت زیر ساده می‌شود

$$3H^2 (1 - \epsilon - \frac{1}{6} \omega \epsilon^2 a^{-2\epsilon}) - \sigma^2 = \Lambda \pi G (\rho_m + \rho_\Lambda). \quad (13)$$

برای نوشتن معادله بیانگی بر حسب پارامتر چگالی لازم است که  $\sigma^2 = \sigma_0^2 H^2$  که  $\sigma_0^2$  یک ثابت است در نتیجه معادله (۱۳) به صورت زیر ساده می‌شود

$$3H^2 \left( 1 - \frac{\sigma_0^2}{3} - \epsilon - \frac{1}{6} \omega \epsilon^2 a^{-2\epsilon} \right) = \Lambda \pi G (\rho_m + \rho_\Lambda). \quad (14)$$

با تعریف پارامتر چگالی‌ها به صورت  $\Omega_\sigma = \frac{\sigma_0^2}{3}$ ،  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda \pi G \rho_\Lambda}{3H^2}$ ،  $\Omega_m = \frac{\Lambda \pi G \rho_m}{3H^2}$ ، که  $\Omega_\sigma$  پارامتر چگالی ناهمسانگردی است معادله (۱۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda = \gamma - \Omega_\sigma, \quad (15)$$

که در آن  $\gamma = 1 - \epsilon - \frac{1}{6} \omega \epsilon^2 a^{-2\epsilon}$  است، معادله بالا بیان می‌کند که مجموع پارامتر چگالی‌های عالم برابر یک است بنابراین اگر پارامتر خمش فضایی را در نظر بگیریم چون مقدار آن با مجذور فاکتور مقیاس رابطه عکس دارد جهان حال حاضر تخت به نظر می‌رسد. در نتیجه در زمان به اندازه کافی طولانی ناهمسانگردی عالم میرا می‌گردد و جهان همسانگرد می‌شود. رابطه بالا هم‌چنین نشان می‌دهد جهان اولیه یعنی در طی دوره تابش غالب جهان ناهمسانگرد و در زمان کنونی که انرژی تاریک غالب است جهان نزدیک به همسانگرد است. وقتی رژیم فروسرخ حاکم است یعنی  $\epsilon = 0$  و همسانگرد است یعنی  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ، و مدل فقط یک پارامتر آزاد  $\Omega_\Lambda$  دارد. بهترین مقدار مشاهداتی که از انطباق با داده‌های مشاهداتی برای خمش صفر بدست می‌آید برابر است با  $\Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04$  [۳۷]. در ادامه ما یک عالم شامل انرژی تاریک و ماده تاریک بدون فشار در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله پایستگی (۱۲)، این رابطه برای انرژی تاریک و ماده تاریک به صورت زیر معین می‌شوند

$$\dot{\rho}_\Lambda + H(3 - \epsilon)(1 + \omega_\Lambda)\rho_\Lambda = 0, \quad (16)$$

$$\dot{\rho}_m + (3 - \epsilon)H\rho_m = 0, \quad (17)$$

که در آنجا  $\omega_\Lambda = p_\Lambda/\rho_\Lambda$  پارامتر حالت انرژی تاریک است. دربخش‌های بعدی ما روی شکل خاصی از انرژی تاریک، یعنی انرژی تاییک شبح تمرکز می‌کنیم

## ۳ نتایج

### ۱.۳ انرژی تاریک شبح در جهان فرکتالی

رابطه چگالی انرژی شبح با پارامتر هابل به صورت زیر است [۳۸]

$$\rho_\Lambda = \alpha H, \quad (18)$$

که در آن  $\alpha$  یک ثابت با بُعد توان سه انرژی، و تقریباً از مرتبه  $\Lambda_{QCD}^3$  است که  $\Lambda_{QCD} \sim 100 \text{ MeV}$ . مشتق زمانی رابطه (۱۴) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{6} \frac{\omega \epsilon^2 a^{-2\epsilon}}{\gamma - \Omega_\sigma} - \frac{3 - \epsilon}{2} \left( 1 + \frac{\Omega_\Lambda \omega_\Lambda}{\gamma - \Omega_\sigma} \right) \quad (19)$$

با جاگذاری رابطه بالا در معادله (۱۸) معادله پارامتر حالت انرژی تاریک شیخ به صورت زیر معین می شود

$$\omega_{\Lambda} = \frac{(\Omega_{\sigma_0} - \gamma)(3 - \epsilon) + \frac{\omega \epsilon^{\tau}(1+z)^{\tau \epsilon}}{3}}{(2\Omega_{\sigma_0} - 2\gamma + \Omega_{\Lambda})(\epsilon - 3)}. \quad (20)$$

هم چنین برای بررسی تحول زمانی پارامتر چگالی انرژی تاریک با مشتق گیری از رابطه پارامتر چگالی انرژی تاریک شیخ و به کمک  $\dot{\Omega}_{\Lambda} = H\Omega'_{\Lambda}$  می توان به رابطه زیر رسید

$$\Omega'_{\Lambda} = -\Omega_{\Lambda} \left( \frac{(\Omega_{\sigma_0} + \Omega_{\Lambda} - \gamma)(-3 + \epsilon) + \frac{\omega \epsilon^{\tau}(1+z)^{\tau \epsilon}}{3}}{2\Omega_{\sigma_0} - 2\gamma + \Omega_{\Lambda}} \right). \quad (21)$$

بعلاوه برای تعیین پارامتر کندشوندگی  $q = -1 - \dot{H}/H^2$  می توان نوشت

$$q = -1 - \frac{(\Omega_{\sigma_0} + \Omega_{\Lambda} - \gamma)(-3 + \epsilon) + \frac{\omega \epsilon^{\tau}(1+z)^{\tau \epsilon}}{3}}{2\Omega_{\sigma_0} - 2\gamma + \Omega_{\Lambda}}. \quad (22)$$

در شکل (۱)، نمودار تحول  $\omega_{\Lambda}(z)$ ،  $\Omega_{\Lambda}(z)$  و  $q(z)$  به عنوان تابعی از قرمزگرایی  $z$  در انرژی تاریک شیخ برای مقادیر متفاوت  $\Omega_{\sigma_0}$  رسم گردیده است که مقدار پارامترهای کمکی به صورت  $\Omega_{\Lambda}^0 = 0.69$ ،  $\epsilon = 0.1$  و  $\omega = 0.3$  هستند. در نمودار پارامتر حالت مشاهده می شود که برای مقادیر مختلف  $\Omega_{\sigma_0}$  در زمان های خیلی بزرگ ( $t \rightarrow \infty$ ) نمودارها همگرا به مقدار  $-1$  می شوند یعنی همانند ثابت کیهانشناختی عمل می کنند که با داده های کیهانشناختی سازگارند. و با افزایش  $\Omega_{\sigma_0}$  نمودار به مقادیر کوچکتری از  $\omega_{\Lambda}$  جابجا می شود، بنابراین پارامتر ناهمسانگردی فاز فانتوم را افزایش می دهد. آن قابل ذکر است که در نسبت عام  $\omega_{\Lambda}(z=0) \approx -0.78$  که مطابق داده های WMAP<sup>۱۰</sup> برابر  $2\sigma$  است [۳۹]. در نمودار میانی، تحول پارامتر چگالی انرژی تاریک و ماده تاریک بر حسب قرمزگرایی رسم گردیده است که همانگونه که در نمودار روشن است، چون مجموع آنها ثابت است رفتار این دو کمیت عکس همدیگر می باشد یعنی افزایش یکی سبب کاهش دیگری می شود، و با افزایش  $\Omega_{\sigma_0}$  هر دو پارامتر چگالی ماده و انرژی تاریک به مقدارهای کوچکتری از پارامتر چگالی جابجا می شوند. شکل سوم، نمودار پارامتر کند شونده بر حسب قرمزگرایی را نشان می دهد، از مشاهده نمودار ملاحظه می شود که افزایش  $\Omega_{\sigma_0}$  در قرمزگرایی بزرگ، سبب جابجای نمودار به مقادیر کمتری از پارامتر کند شونده می شود و در قرمزگرایی کوچک همه نمودارها بر هم منطبق می شوند، هم چنین، مدل در قرمزگرایی کوچک، یک جهان با شتاب انبساطی مثبت را توصیف می کند، که در آینده به انبساط دوسویه ختم می گردد. بعلاوه از نمودار پیدا است که بهترین مقدار گذار قرمزگرایی و پارامتر کندشوندگی در توافق با مشاهدات برای انرژی تاریک شیخ در کیهانشناختی فرکتالی برابر است با  $z = 1/0.8^{+0.01}_{-0.01}$  و  $q_0 = -0.52^{+0.01}_{-0.01}$ ، در حالی که برای حالت ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی  $\Lambda$ CDM این مقادیر به ترتیب برابر است با  $z \sim 0.67$  و  $q_0 \sim -0.55$ .

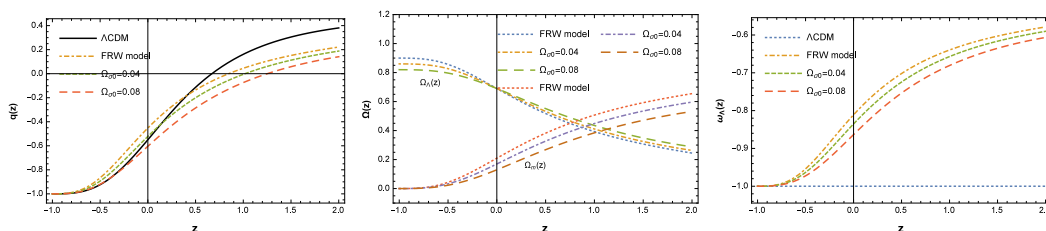
از آنجای که مدل های انرژی تاریک زیادی معرفی شده اند، ساهنی<sup>۱۱</sup> در [۴۱] برای تمیز این مدل های مختلف انرژی تاریک، زوج پارامتر حالت یاب  $\{r, s\}$  را معرفی نمود که بر اساس مشتق سوم فاکتور مقیاس عالم مدل های مختلف انرژی تاریک را بازشناسی و تمیز می دهد. از اینرو در کار حاضر این پارامتر  $\{r, s\}$  [۴۱، ۴۲، ۴۳] را مورد بررسی قرار می دهیم. این پارامترهای حالت یاب به صورت زیر تعریف می شوند

$$r \equiv \frac{\ddot{a}}{aH^3} \equiv q + 2q^2 + q', \quad s \equiv \frac{r-1}{3(q-\frac{1}{3})}, \quad (23)$$

که در آن  $q' = dq/dz$  و پارامتر کند شونده از رابطه (۲۲) پیروی می کند، پارامتر حالت یاب یک تشخیص هندسی است که وابسته به متریک و فاکتور مقیاس توصیف کننده فضا-زمان است. همانطور که در مرجع [۴۴، ۴۵] توضیح داده شده است پارامتر تشخیص حالت یاب به طور موثر تمیز بین مدل های مختلف انرژی تاریک را نشان می دهد. اکنون ملاحظه خواهد شد که این پارامتر یک خاصیت قابل توجهی برای مدل بیانگی ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی  $\Lambda$ CDM دارد پارامتر حالت یاب  $s$  یک ترکیب خطی از  $r$  و  $q$  است. در صفحه  $\{r, s\}$ ، مقدار  $s > 0$  متناظر با مدل

<sup>۱۰</sup> Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

<sup>۱۱</sup> Sahni

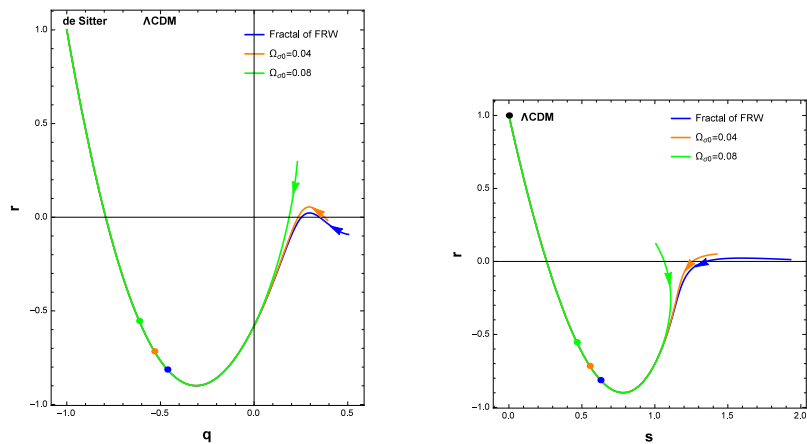


شکل ۱: شکل سمت راست: نمودار تحول پارامتر حالت بر حسب قرمزگرایی انرژی تاریک فرکتالی برای مقادیر مختلف  $\Omega_\sigma$  در متریک بیانکی را نشان می‌دهد. شکل میانی: نمودار پارامتر چگالی ماده تاریک و انرژی تاریک برای مقادیر متفاوت  $\Omega_\sigma$  بر حسب قرمزگرایی را توصیف می‌کند. قاب سمت چپ: نمودار پارامتر کندشوندگی برای مقادیر متفاوت  $\Omega_\sigma$  بر حسب قرمزگرایی را نشان می‌دهد. که پارامترهای کمکی به صورت  $\Omega_m = 0.3$  و  $\Omega_\Lambda = 0.7$  و  $\epsilon = 0.1$  هستند.  $\omega = 0.3$

جدول ۱: پارامترهای حالت یاب برای مقادیر متفاوت  $\Omega_\sigma$  در مدل انرژی تاریک شیخ

$\Omega_\sigma$	$r$	$s$
0	-0.813	0.627
0.04	-0.716	0.554
0.08	-0.553	0.465

انرژی تاریک شیخ کویتنس و مقدار  $s < 0$  متناظر با مدل انرژی تاریک شیخ فانتوم است. نمودار (۲) مسیر تحول  $\{r, s\}$  در انرژی تاریک شیخ مدل فرکتالی برای مقادیر متفاوت  $\Omega_\sigma$  را نشان می‌دهد. همانطور که از نمودار مشاهده می‌شود با انبساط جهان مسیر تحول در صفحه  $r - s$  از راست به چپ شروع می‌شود. در صفحه حالت یاب  $\{r - s\}$  مدل ماده تاریک سرد با ثابت کیهانشناختی در جهان تخت متناظر با یک نقطه ثابت  $\{1, 0\}$  می‌باشد. رفتار مدل‌های دیگر انرژی تاریک بر اساس فاصله بین آنها و نقطه ثابت ماده تاریک سرد با ثابت کیهانشناختی  $\Lambda$  اندازه‌گیری می‌شوند. در این نمودار پارامتر  $r$  با افزایش  $s$  ابتدا کاهش می‌یابد سپس حول مقدار  $0.7 \sim s$  به شدت افزایش می‌یابد. در جدول (۱) مقدار پارامترهای حالت یاب  $r, s$  برای مقادیر متفاوت  $\Omega_\sigma$  نشان داده شده است به علاوه اختلاف بین پارامتر مدل انرژی تاریک شیخ و ماده تاریک سرد همراه ثابت کیهانشناختی در نمودار قابل مشاهده است به عنوان یک بیان مکمل، شکل سمت چپ، نمودار مسیر تحول پارامتر حالت یاب بر حسب پارامتر کندشوندگی  $r - q$  را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که هر دو مدل ماده تاریک سرد همراه ثابت کیهانشناختی و مدل انرژی تاریک شیخ در کیهانشناختی فرکتالی از نقطه یکسان در گذشته شروع به رشد می‌کنند که متناظر با یک جهان ماده غالب است و تحولشان در نقطه یکسان در آینده یعنی  $(r = 1, q = -1)$  پایان می‌یابد که متناظر با انبساط دوسویه است.



شکل ۲: شکل سمت راست: مسیر تحول در صفحه  $r - s$  برای مدل انرژی تاریک شیخ در کیهانشناختی فرکتالی را نشان می‌دهد، مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی متناظر با یک نقطه ثابت است. نمودار سمت چپ: مسیر تحول در صفحه  $r - q$  برای مدل انرژی تاریک شیخ در کیهانشناختی فرکتالی را نشان می‌دهد نقاط مقادیر حاضر پارامترهای حالت یاب  $(s, r)$  را نشان می‌دهند.

### ۲.۳ انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته در کیهانشناختی فرکتالی

در این زیر بخش سناریو اصلی برهم کنش بین انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته با ماده تاریک سرد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در مرجع [۱۵] پیشنهاد شد که سهم جمله  $H^2$  برای توصیف تحول عالم اولیه ممکن است مفید باشد و به صورت زیر چگالی انرژی شیخ تعمیم یافته باز تعریف گردید

$$\rho_\Lambda = \alpha H + \beta H^2, \tag{24}$$

که در آن ضریب  $\beta$  یک ثابت با بُعد مجذور انرژی است. بعلاوه، پارامتر چگالی انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته به صورت زیر بدست می‌آید

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}} = \frac{\alpha + \beta H}{3M_p^2 H}. \tag{25}$$

مشتق گیری معادله (۲۴) به رابطه زیر منجر می‌شود

$$\dot{\rho}_\Lambda = \dot{H}(\alpha + 2\beta H). \tag{26}$$

به کمک روابط (۱۶)، (۲۴) و (۲۶) معادله پارامتر حالت به صورت زیر معین می‌گردد

$$\omega_\Lambda = \frac{-3(\Omega_{\sigma_0} - \gamma)(-3 + \epsilon) + \omega \epsilon^3 a^{-2\epsilon}(1 + 2H\zeta)}{3(\epsilon - 3)(2\Omega_{\sigma_0} - 2\gamma + \Omega_\Lambda + 2H\zeta(\Omega_{\sigma_0} - \gamma + \Omega_\Lambda))}, \tag{27}$$

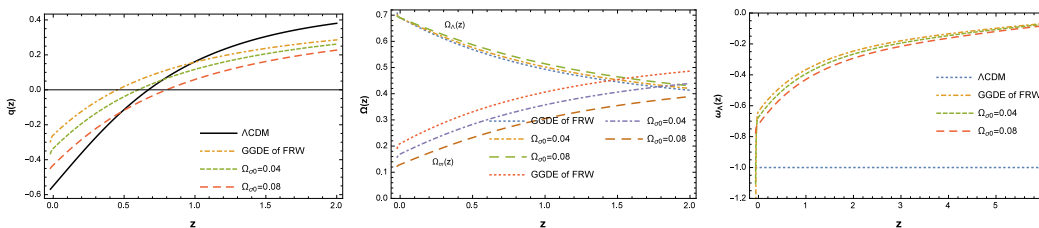
که در آن  $\zeta = \beta/\alpha$  است. در حالت حدی با اتخاذ  $\gamma = 1, \epsilon = 0$  نتیجه بیانکی جهان انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته در مرجع [۴۶] حاصل می‌گردد. هم چنین تحول پارامتر چگالی انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته با مشتق گیری زمانی از رابطه (۱۵) و استفاده از روابط (۲۴)، (۲۵)، (۲۶) به آسانی به صورت زیر معین می‌شود

$$\Omega'_\Lambda = -\Omega_\Lambda \left( \frac{3(\Omega_{\sigma_0} + \Omega_\Lambda - \gamma)(-3 + \epsilon) + \omega \epsilon^3 a^{-2\epsilon}}{3(2\Omega_{\sigma_0} - 2\gamma + \Omega_\Lambda + 2H\zeta(\Omega_{\sigma_0} - \gamma + \Omega_\Lambda))} \right). \tag{28}$$

و نهایتاً برای رابطه پارامتر کند شونده  $\epsilon$  به کمک روابط (۱۹) و (۲۷) به رابطه زیر می‌رسیم

$$q = -1 - \frac{(1 + \zeta H) \left( 3(\Omega_{\sigma_0} + \Omega_{\Lambda} - \gamma)(-3 + \epsilon) + \omega \epsilon^3 a^{-2\epsilon} \right)}{3(2\Omega_{\sigma_0} - 2\gamma + \Omega_{\Lambda} + 2H\zeta(\Omega_{\sigma_0} - \gamma + \Omega_{\Lambda}))} \quad (29)$$

اکنون به کمک معادلات پارامتر حالت، پارامتر چگالی و پارامتر کند شونده در شکل (۳) نمودار تحول انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته بر حسب قرمزگرایی را برای مقادیر مختلف پارامتر چگالی ناهمسانگردی  $\Omega_{\sigma_0}$  با انتخاب مقدار اولیه  $\zeta = 0.1$  رسم می‌کنیم. در شکل سمت راست مشاهده می‌شود که نمودار پارامتر حالت انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته تحولی مشابه مدل انرژی تاریک شیخ در زمان اولیه عالم دارد که رفتاری کوینتسنس گونه با شیئی هموارتر نسبت به حالت مشابه قبلی است و با افزایش چگالی پارامتر ناهمسانگردی مقدار پارامتر حالت بر حسب قرمزگرایی به مقادیر کمتر از این کمیت جابجا می‌شود. بعلاوه از نمودار مشاهده می‌شود رفتار گذار پارامتر حالت از مقدار بزرگتر از منفی یک به مقدار کوچکتر از آن بیانگر گذار از کوینتسنس به فانتوم می‌باشد. همچنین گستره مقادیر پارامتر حالت با داده‌های مشاهداتی سازگار است. که مقدار تعیین شده برای پارامتر حالت برای داده‌های  $Planck + WP + BAO$  برابر  $\omega_{\Lambda} = -1.13_{-0.25}^{+0.24}$  و برای  $Planck + WP + Union2/1$  برابر با  $\omega_{\Lambda} = -1.09_{-0.17}^{+0.17}$  و برای داده‌های  $Planck + WP + SNLS$  برابر با  $\omega_{\Lambda} = -1.13_{-0.14}^{+0.13}$  معرفی شده است. نمودار میانی نشان می‌دهد که در زمان حاضر مقدار  $\Omega_{\Lambda} \rightarrow 0.7$  و  $\Omega_m \rightarrow 0.17 \pm 0.04$  که رفتاری مشابه انرژی تاریک شیخ حالت قبل دارند. از نمودار پارامتر کند شونده مشاهده می‌شود که رفتار این پارامتر کاملاً متفاوت با کیهانشناختی ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی است. برای انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته گذار از شتاب کند شونده به تند شونده در قرمزگرایی  $z = 0.60_{-0.14}^{+0.19}$  اتفاق می‌افتد و مقدار حاضر این پارامتر برابر است با  $q_0 = -0.33_{-0.95}^{+0.77}$  در حالی که برای ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی این مقدار برابر با  $z \sim 0.67$  و  $q_0 \sim -0.55$  است.



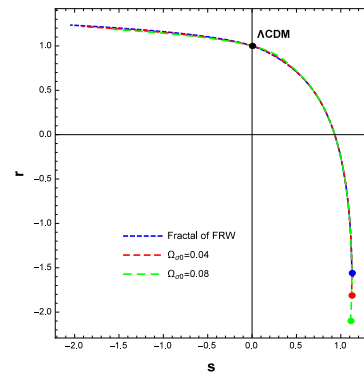
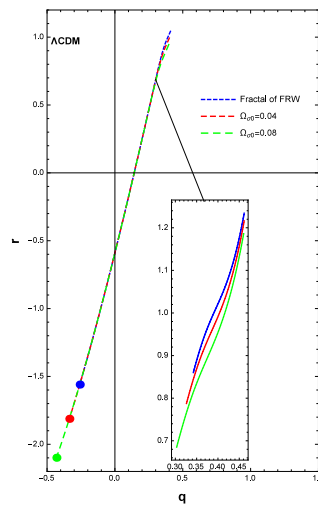
شکل ۳: شکل سمت راست، میانی و چپ: به ترتب تحول پارامتر حالت، پارامتر چگالی انرژی و پارامتر کند شونده تاریک شیخ تعمیم یافته در متریک بیانکی بر حسب قرمزگرایی برای  $\Omega_{\sigma_0}$  مختلف را نشان می‌دهند، که در آن پارامترهای کمکی  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  و  $\Omega_{m_0} = 0.3$ ،  $\epsilon = 0.1$ ،  $\zeta = 0.1$  و  $\omega = 0.3$  هستند.

شکل (۴) مسیر تحول انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته در کیهان شناسی فرکتالی را در صفحه  $r - q$  و  $r - s$  نشان می‌دهد. با توجه به نمودار نقطه ثابت معرف تحول مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی است. تشخیص حالت یاب می‌تواند مدل‌های متفاوت انرژی تاریک از هم تمیز دهد. نمودار  $r - s$  رفتار انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته در مقایسه با مدل کوینتسنس و ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که وقتی  $r$  افزایش می‌یابد  $s$  کاهش می‌یابد. مقدار حاضر این کمیت‌ها برای مقادیر متفاوت از پارامتر چگالی ناهمسانگردی در جدول (۲) آورده شده است از نمودار تحول  $r - q$  مشاهده می‌شود هر دو مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی و انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته از یک نقطه  $q = 0.5$ ،  $r = 1$  در گذشته شروع به رشد می‌کنند و با گذشت زمان و رشد جهان مقدار  $r$  کوچکتر از یک می‌شود.



جدول ۲: پارامترهای حالت یاب برای مقادیر متفاوت  $\Omega_\sigma$  در انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته

$\Omega_\sigma$	$r_s$	$s_s$
۰	-۱/۵۵۹	۰.۶۲۷
۰/۰۴	-۱/۸۱۲	۱/۱۲۱
۰/۰۸	-۲/۰۹۹	۱/۱۰۹



شکل ۴: نمودار سمت راست، مسیر تحول مدل انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته در کیهانشناختی فرکتالی را در صفحه  $r - s$  نشان می‌دهد، و مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی در نقطه ثابت  $\{1, 0\}$  قرار دارد. نمودار سمت چپ این مسیر تحول را در صفحه  $r - q$  نشان می‌دهد. نقاط رنگی در مسیر تحول مقدار حاضر  $q, s, r$  را نشان می‌دهند.

## ۴ بحث

در این کار با استفاده از نظریه فرکتالی گرانشی، مدل‌های مختلف کیهانشناختی در جهان ناهمسانگرد مورد مطالعه قرار گرفتند. اثر ناهمسانگردی را با انتخاب پارامتر چگالی ناهمسانگردی مختلف روی پارامترهای مشاهده پذیر مورد بررسی قرار دادیم که نتیجه آن به صورت زیر خلاصه می‌شود. ابتدا معادلات میدان را بدست آورده سپس بر اساس آنها معادله پارامترهای مشاهده پذیر و نمودارهای آنها را بدست آوردیم. در حالت حدی مقدار  $\omega_\Lambda$ ،  $\Omega_\Lambda$  و  $q$  برای هر دو حالت انرژی تاریک شیخ و تعمیم یافته آن ارزیابی کردیم که نتایج آن در شکل (۱) و (۳) آورده شده است. بر اساس این مدل انبساط شتابدار جهان سریعتر از تحول آن در حالت همسانگرد است. از نمودار (۲) و (۴) مشاهده شد که پارامتر حالت در زمان حاضر شبیه ثابت کیهانشناختی رفتار می‌کند، در حالی که در مورد انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته خط تقسیم فانتوم می‌تواند قطع شود. بر اساس نتایج این کار می‌توان نتیجه گرفت که در جهان ناهمسانگرد، شتاب مثبت حاضر جهان از یک شتاب کننده شونده در فاز اولیه دوره ماده غالب حاصل می‌شود. از نمودارها نشان داده شد که فرم‌گرایی گذار و پارامتر کندشوندگی حاضر برای مدل‌های انرژی تاریک شیخ و تعمیم یافته آن به ترتیب برابراند با  $z = 1/0.8^{+0.00026}_{-0.00019}$ ،  $z = 0.604^{+0.000198}_{-0.000145}$  و  $q = -0.522^{+0.000070}_{-0.000082}$ ، مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی برابر با  $0.67 \sim z$  و  $0.55 \sim q$  که با مشاهدات سازگار است [۴۸، ۴۷].

نهایتاً ما رفتار پارامترهای حالت یاب  $r$  و  $s$  را برای هر دو مدل انرژی تاریک شیخ و تعمیم یافته آن در مقایسه با مدل ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی در متریک همسانگرد فریدمن رابرتسون واکر مورد بررسی قرار دادیم. از نمودارها، در صفحه  $r - q$  و  $r - s$  مقادیر حدی شناخته شده را بدست آوردیم که از جمله برای ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی  $(r, s) = (1, 0)$ ، برای دوسیمته  $(r, q) = (1, -1)$ ، ماده تاریک سرد  $(r, q) = (1, 0.5)$  و نهایتاً برای دوره انرژی تاریک فانتوم  $s < 0$  و کوینتسنس مقدار پارامتر حالت یاب  $s > 0$  حاصل شد. همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود در مدل انرژی تاریک شیخ برای همه مقادیر پارامتر ناهمسانگردی مسیر تحول نزدیک به رفتار کوینتسنسی و حد ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی است. اما در انرژی تاریک شیخ تعمیم یافته این مسیر تحول و حد ماده تاریک سرد به همراه ثابت کیهانشناختی به رفتار فانتومی نزدیک است. به علاوه در صفحه  $r - q$  خواص تحولی جهان فرکتالی مورد بحث قرار گرفت که نتیجه آن در نمودارهای شکل (۲) و (۴) توضیح داده شد.

## مراجع

- [1] A. G. Reiss, A.V. Filippenko, P. Challis *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [2] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark energy theory and observation*(Cambridge 2010).
- [3] J. Edmund, M. Sami, S. Tsujikawa., *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [4] S. Tsujikawa., *Astrophys. Space Sci.* **370**, 331 (2011).
- [5] B. Ratra, P. Peebles., *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988).
- [6] C. A. Picon, V. F. Mukhanov, P. J. Steinhardt., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438 (2000).
- [7] F. R. Urban and A. R. Zhitnitsky., *Phys. Lett. B* **688**, 9 (2010).
- [8] N. Ohta., *Phys. Lett. B* **695**, 41 (2011).
- [9] E. Witten., *Nucl. Phys. B* **156**, 269 (1979).
- [10] G. Veneziano., *Nucl. Phys. B* **159**, 213 (1979).
- [11] P. Nath and R. L. Arnowitt., *Phys. Rev. D* **23**, 473 (1981).
- [12] F. Piazza and S. Tsujikawa., *JCAP* **0407**, 004 (2004).

- [13] A. R. Zhitnitsky., Phys. Rev. D **86**, 045026 (2012).
- [14] M. Maggiore., Phys. Rev. D **83**, 063514 (2011).
- [15] R. G. Cai, Z. L. Tuo, Y. B. Wu, Y. Y. Zhao., Phys. Rev. D **86**, 023511 (2012).
- [16] A. Sheykhi, E. Ebrahimi, Y. Yosef.i, Can. J. Phys. **91**, 662 (2013).
- [17] X. Zhang., Phys. Lett. B **648**, 1 (2007); A. Sheykhi., Phys. Lett. B **682**, 329 (2010); K. Karami, J. Fehri., Phys. Lett. B **684**, 61 (2010).
- [18] G. Calcagni., Phys. Rev. Lett. **104**, 251301 (2010).
- [19] G. Calcagni., JHEP **03**, 120 (2010).
- [20] A. D. Linde., Phys. Lett. B **175**, 395 (1986).
- [21] J. J. Dickau., *Chaos, Solitons, Fractals* **41**, 2103 (2009).
- [22] S. Haldar and S. Chakraborty., arXiv:1508.05090 [gr-qc].
- [23] A. Sheykhi, Z. Teimoori, B. Wang., Phys. Lett. B **1204**, 718 (2013).
- [24] O. A. Lemets and D.A. Yerokhin., arXiv:1202.3457v3; K. Karami, M. Jamil, S. Ghaffari and K. Fahimi., Can. J. Phys. **91**, 770 (2013).
- [25] M. Salti, M. Korunur and I. Acikgoz., Eur. Phys. J. Plus. **129**, 95 (2014); M. Salti and O. Aydogdu., Math. Comput. Appl. **21**, 21 (2016); S. Chattopadhyay, A. Pasqua and S. Roy, ISRN High Energy Physics **2013**, 6 (2013).
- [26] N. Azimi, F. Barati, Int. J. Theor., Phys. **55**, 3318 (2016).
- [27] H. K. Eriksen *et al.*, Astrophys. J. **605**, 1420 (2004).
- [28] T. R. Jaffe *et al.*, Astrophys. J. **643**, 616 (2006).
- [29] T. Singh, A.K. Agrawal., Astrophys. Space Sci. **182**, 289 (1991).
- [30] M. F. Shamir., Int. J. Theor. Phys. **50**, 637 (2011).
- [31] D. R. K. Reddy, *et al.*, Int. J. Theor. Phys. **51**, 3222 (2012).
- [32] D. R. K. Reddy, *et al.*, Int. J. Theor. Phys. **52**, 1214 (2013).
- [33] A. Aghamohammadi, H. Hossienkhani and Kh. Saaidi, Modern Physics Letters A **33**, 13 (2018).
- [34] H. Hossienkhani, A. Aghamohammadi and A. Jafari *et al.*, Physics of the Dark Universe **18**, 17 (2017).
- [35] H. Hossienkhani, Int. J. Theor., Phys. **55**, 4924 (2016); V. Fayaz, H. Hossienkhani, Z.Zarei and N. Azimi., Eur. Phys. J. Plus **131**, 22 (2016); H. Hossienkhani, A. Najafi and N. Azim.i, Astrophys. Space Sci. **353**, 311 (2014).
- [36] A. Jawad, S. Rani, I. G. Salako and F. Gulshan., Int. J. Mod. Phys. D **26**, 1750049 (2017).
- [37] T. M. Davis, E. Mortsell, J. Sollerman *et al.*, Astrophys. J. **666**, 716 (2007).
- [38] H. A. Borges, S. Carneiro., Gen. Rel. Grav. **37**, 1385 (2005).

- [39] E. Komatsu *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009).
- [40] E.E.O. Ishida *et al.*, *Astropart. Phys.* **28**, 547 (2008).
- [41] V. Sahni *et al.*, *JETP Lett.* **77**, 201 (2003).
- [42] U. Alam, V. Sahni, T.D. Saini and A.A. Starobinsky., *MNRAS*, **344**, 1057 (2003).
- [43] F.Y. Wang, Z.G. Dai and S. Qi., *Astronomy & Astrophysics* **507**, 53 (2009).
- [44] X. Zhang., *Phys. Lett. B* **611**, 1 (2005); X. Zhang., *Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 1597 (2005).
- [45] S. Chattopadhyay., *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, **84**, 87 (2014); S. Chattopadhyay., *Mod. Phys. Lett. A* **31**, 1650202 (2016)
- [46] F. Barati., *Int. J. Theor. Phys.* **55**, 2189 (2016).
- [47] Y. G. Gong, A. Wang., *Phys. Rev.* **75**, 043520 (2006).
- [48] Y. S. Myung., *Phys. Lett. B* 652, 223 (2007); K. Y. Kim, H. W. Lee and Y. S. Myung., *Phys. Lett. B* 660, 118 (2008).